Un Student Simple

On a un ensemble de n observations IID générées par le PGD

$$y_t = \mu_0 + \sigma_0(u_t + n^{-1/2}\delta); \quad u_t \sim \mathrm{IID}(0,1). \tag{1}$$

Ce PGD est un PGD mobile, dans le sens où ses paramètres dépendent de la taille de l'échantillon. En effet, l'espérance de y_t est égale à $\mu_0 + n^{-1/2}\sigma_0\delta$. On voit aussi que

$$\frac{y_t - \mu_0}{\sigma_0} = u_t + n^{-1/2}\delta. \tag{2}$$

On souhaite tester l'hypothèse que l'espérance est égale à μ_0. Bien entendu, cette hypothèse n'est vraie que si $\delta = 0$. La statistique de test est un Student, que nous notons T, défini par l'équation

$$T = \frac{n^{1/2}(\hat\mu - \mu_0)}{\hat\sigma}. \tag{3}$$

L'estimateur $\hat\mu$ est simplement la moyenne de l'échantillon. Étant donné le PGD (1), on a

$$\hat\mu = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t = \mu_0 + \sigma_0\big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t + n^{-1/2}\delta\big). \tag{4}$$

L'estimateur $\hat\sigma^2$ est l'estimateur sans biais de la variance:

$$\hat\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat\mu)^2. \tag{5}$$

On définit la variable aléatoire w:

$$w \equiv n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} u_t. \tag{6}$$

Par le théorème limite centrale, la loi asymptotique de w est la $\mathrm{N}(0,1)$. L'équation (4) peut s'écrire comme

$$\frac{n^{1/2}(\hat\mu - \mu_0)}{\sigma_0} = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} u_t + \delta = w + \delta. \tag{7}$$

En utilisant (2) et (7), on voit que

$$\frac{y_t - \hat\mu}{\sigma_0} = \frac{y_t - \mu_0}{\sigma_0} - \frac{\hat\mu - \mu_0}{\sigma_0} = u_t + n^{-1/2}\delta - n^{-1/2}(w + \delta) = u_t - n^{-1/2}w. \tag{8}$$

De la définition (5) on voit que

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t - \hat{\mu}}{\sigma_0}\right)^2. \tag{9}$$

Or, de (8), on a

$$\left(\frac{y_t - \hat{\mu}}{\sigma_0}\right)^2 = u_t^2 - 2n^{-1/2}wu_t + n^{-1}w^2,$$

d'où on voit que (9) devient

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - 2wn^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} u_t + w^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - w^2\right) \qquad \text{par la définition (6)}\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{t=1}^{n}(u_t^2 - 1) + n - (w^2-1) - 1\right)\\
&= 1 + \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(u_t^2-1) - \frac{1}{n-1}(w^2-1)\\
&= 1 + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(u_t^2-1) - n^{-1}(w^2-1) + o_p(n^{-1}).
\end{aligned} \tag{10}$$

On rappelle qu'une variable aléatoire z est $o_p(n^{-1})$ si $nz \to 0$ en probabilité quand $n \to \infty$. Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1} = n^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1} &= n^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} = n^{-1}\big(1 + O_p(n^{-1})\big)\\
&= n^{-1} + O_p(n^{-2}),
\end{aligned}$$

ce qui justifie la dernière ligne de (10). Notons que (10) ne dépend pas de δ, et que le deuxième terme, $n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(u_t^2-1)$, est $O_p(n^{-1/2})$ par le théorème limite centrale, sachant que $\mathrm{E}(u_t^2-1) = 0$.

La statistique (3) s'écrit

$$T = \frac{n^{1/2}(\hat{\mu} - \mu_0)}{\sigma_0}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{-1/2},$$

et, par (7) et (10), ceci est égal à

$$(w+\delta)\Big(1 + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(u_t^2-1) - n^{-1}(w^2-1)\Big)^{-1/2}. \tag{11}$$

Faisons la définition

$$q \equiv n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} (u_t^2 - 1). \tag{12}$$

On vient de voir que $q = O_p(1)$. Nous pouvons maintenant nous servir du théorème du binomial pour obtenir un développement de l'expression élevée à la puissance $-1/2$ dans l'expression (11). Nous obtenons

$$1 - \frac{1}{2}n^{-1/2}q + \frac{1}{2}n^{-1}(w^2 - 1) + \frac{3}{8}n^{-1}q^2 + o_p(n^{-1}),$$

et, par conséquent,

$$T = (w + \delta)\big(1 - \frac{1}{2}n^{-1/2}q + \frac{1}{2}n^{-1}(w^2 - 1) + \frac{3}{8}n^{-1}q^2\big) + o_p(n^{-1}).$$

Le Développement d'Edgeworth

Pour la suite, il s'avère plus commode de considérer $T - \delta$ plutôt que T. On a

$$\begin{aligned} T - \delta = w\big(1 - &\frac{1}{2}n^{-1/2}q + \frac{1}{2}n^{-1}(w^2 - 1) + \frac{3}{8}n^{-1}q^2\big) \\ &+ \delta\big(-\frac{1}{2}n^{-1/2}q + \frac{1}{2}n^{-1}(w^2 - 1) + \frac{3}{8}n^{-1}q^2\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Afin de construire le développement d'Edgeworth de la distribution de $T - \delta$, nous avons besoin des espérances des variables aléatoires égales aux polynômes d'Hermite évalués en $T - \delta$. Il est donc nécessaire de calculer les espérances des puissances de $T - \delta$. Pour ce faire, nous avons besoin des espérances des puissances 3 et 4 des u_t. Nous écrivons

$$\mathrm{E}(u_t^3) = \kappa_3 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(u_t^4) = 3 + \kappa_4. \tag{14}$$

On se rappelle que le quatrième moment de la loi $\mathrm{N}(0, 1)$ est 3; κ_4 est donc l'écart entre le moment de la $\mathrm{N}(0, 1)$ et celui des u_t.

Des faits que $\mathrm{E}(u_t) = 0$ et $\mathrm{E}(u_t^2) = 1$, il découle de la définition (6) et de l'indépendance des u_t que

$$\mathrm{E}(w) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(w^2) = 1.$$

On a aussi que

$$\mathrm{E}(w^3) = n^{-3/2} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \mathrm{E}(u_t u_s u_r).$$

Or, l'espérance $\mathrm{E}(u_t u_s u_r)$ est nulle à moins que $t = s = r$, par l'indépendance des u_t. Il vient que

$$\mathrm{E}(w^3) = n^{-3/2} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(u_t^3) = n^{-1/2}\kappa_3.$$

Ensuite, on a

$$\mathrm{E}(w^4)\ n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\mathrm{E}(u_t u_s u_r u_p).$$

Cette fois-ci, l'espérance $\mathrm{E}(u_t u_s u_r u_p)$ est un peu plus compliquée. Elle est nulle à moins que chaque indice n'intervienne au moins deux fois. En tenant compte de toutes les possibilités, on trouve que

$$\mathrm{E}(w^4) = n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t^4) + 3n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1,s\neq t}^{n}\mathrm{E}(u_t^2 u_s^2). \tag{15}$$

Pourquoi le facteur de 3? C'est parce que, si nous commençons par l'indice t, il peut être égal à s, r, ou p, soit 3 possibilités. Ce choix une fois fait, les deux autres indices doivent être les mêmes, et nous n'avons toujours que les 3 possibilités. Notez que, si on a trois fois le même indice, alors le quatrième n'apparaît qu'une seule fois, et l'espérance d'un tel terme s'annule. Notez aussi que $\mathrm{E}(u_t^2 u_s^2) = \mathrm{E}(u_t^2)\mathrm{E}(u_s^2)$ pour $s \neq t$, parce que les aléas u_t et u_s sont indépendants. On voit donc que $\mathrm{E}(u_t^2 u_s^2) = 1$, et (15) devient

$$\mathrm{E}(w^4) = n^{-1}(3+\kappa_4) + 3n(n-1)n^{-2},$$

parce que la somme double dans (15) a exactement $n(n-1)$ termes. En simplifiant, on trouve que

$$\mathrm{E}(w^4) = 3n^{-1}(n-1+1) + n^{-1}\kappa_4 = 3 + n^{-1}\kappa_4.$$

Ces calculs ne suffisent malheureusement pas. Il découle directement de la définition (12) que $\mathrm{E}(q) = 0$. Pour $\mathrm{E}(q^2)$, on fait le calcul suivant.

$$\mathrm{E}(q^2) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}\big((u_t^2-1)(u_s^2-1)\big).$$

Vu que u_t et u_s sont indépendants pour $s \neq t$, et que $\mathrm{E}(u_t^2 - 1) = 0$, on voit que l'espérance de chaque terme s'annule à moins que $s = t$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(q^2) &= n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}\big((u_t^2-1)^2\big) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t^4) - 2n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t^2) + n^{-1}\sum_{t=1}^{n}1\\ &= 3+\kappa_4 - 2 + 1 = 2 + \kappa_4.\end{aligned}$$

On a besoin aussi de l'espérance de wq. Des définitions (6) et (12),

$$\mathrm{E}(wq) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}\big(u_t(u_s^2-1)\big) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}(u_t u_s^2) - \sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t).$$

Le dernier terme s'annule parce que $\mathrm{E}(u_t) = 0$. En plus, $\mathrm{E}(u_t u_s^2)$ s'annule à moins que $s = t$, auquel cas on a $\mathrm{E}(u_t^3) = \kappa_3$. Par conséquent,

$$\mathrm{E}(wq) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \kappa_3 = \kappa_3.$$

Considérons maintenant $\mathrm{E}(wq^2)$. On va montrer que cette espérance est $O(n^{-1/2})$. On écrit $O(\cdot)$ plutôt que $O_p(\cdot)$ parce que l'espérance n'est pas une variable aléatoire. En fait,

$$\mathrm{E}(wq^2) = n^{-3/2} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \mathrm{E}\big(u_t(u_s^2 - 1)(u_r^2 - 1)\big).$$

Si l'indice t est différent de s et de r, l'espérance s'annule du fait que $\mathrm{E}(u_t) = 0$. De même, si s est différent des deux autres indices, l'espérance s'annule du fait que $\mathrm{E}(u_s^2 - 1) = 0$, et pareillement pour r. Il faut donc que les trois indices soient les mêmes. Il vient que

$$\mathrm{E}(wq^2) = n^{-3/2} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}(u_t^5 - 2u_t^3 + u_t) = O(n^{-1/2}), \tag{16}$$

parce que la somme est de l'ordre de n.

Nous pouvons maintenant calculer le premier moment de $T - \delta$ jusqu'à l'ordre de n^{-1} compris. En reprenant l'expression (13), nous voyons que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T - \delta) &= \mathrm{E}(w) - \tfrac{1}{2}n^{-1/2}\mathrm{E}(wq) + \tfrac{1}{2}n^{-1}\mathrm{E}(w^3 - w) + \tfrac{3}{8}n^{-1}\mathrm{E}(wq^2) \\
&\quad + \delta\big(-\tfrac{1}{2}n^{-1/2}\mathrm{E}(q) + \tfrac{1}{2}n^{-1}\mathrm{E}(w^2 - 1) + \tfrac{3}{8}n^{-1}\mathrm{E}(q^2)\big) \\
&= -\tfrac{1}{2}n^{-1/2}\kappa_3 + \tfrac{3}{8}n^{-1}\delta(2 + \kappa_4) + o(n^{-1}),
\end{aligned}$$

avec l'élimination de plusieurs espérances non nulles, mais d'un ordre inférieur à celui de n^{-1}.

Pour le deuxième moment, on utilise encore une fois le théorème du binomial afin de montrer que

$$\begin{aligned}
&\big(1 - \tfrac{1}{2}n^{-1/2}q + \tfrac{1}{2}n^{-1}(w^2 - 1) + \tfrac{3}{8}n^{-1}q^2\big)^2 \\
&= 1 - n^{-1/2}q + n^{-1}(w^2 - 1) + \tfrac{3}{4}n^{-1}q^2 + \tfrac{1}{4}n^{-1}q^2 + o_p(n^{-1}) \\
&= 1 - n^{-1/2}q + n^{-1}(w^2 - 1) + n^{-1}q^2 + o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Le résultat (13) nous donne alors

$$\begin{aligned}
(T - \delta)^2 &= w^2\big(1 - n^{-1/2}q + n^{-1}(w^2 - 1) + n^{-1}q^2\big) \\
&\quad + 2w\delta\big(-\tfrac{1}{2}n^{-1/2}q + \tfrac{1}{2}n^{-1}(w^2 - 1) + \tfrac{3}{8}n^{-1}q^2 + \tfrac{1}{4}n^{-1}q^2\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}n^{-1}\delta^2 q^2 + o_p(n^{-1}).
\end{aligned}$$

L'espérance se calcule comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T-\delta)^2 = \mathrm{E}(w^2) - n^{-1/2}\mathrm{E}(w^2q) + n^{-1}\mathrm{E}(w^4-w^2) + n^{-1}\mathrm{E}(w^2q^2) \\
+ \delta\big(-n^{-1/2}\mathrm{E}(wq) + n^{-1}\mathrm{E}(w^3-w) + \tfrac{5}{4}n^{-1}\mathrm{E}(wq^2)\big) \\
+ \tfrac{1}{4}n^{-1}\delta^2\mathrm{E}(q^2) + o(n^{-1})
\end{aligned} \tag{17}$$

Nous avons besoin maintenant de deux espérances encore, celles de w^2q et de w^2q^2.

$$\mathrm{E}(w^2q) = n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\mathrm{E}\big(u_tu_s(u_r^2-1)\big).$$

Par le même raisonnement que celui qui nous a donné (16), il faut que $t = s = r$ pour que l'espérance ne s'annule pas. On a donc que

$$\mathrm{E}(w^2q) = n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}\big(u_t^2(u_t^2-1)\big) = n^{-1/2}(3+\kappa_4-1) = n^{-1/2}(2+\kappa_4). \tag{18}$$

Pour l'autre espérance,

$$\mathrm{E}(w^2q^2) = n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\mathrm{E}\big(u_tu_s(u_r^2-1)(u_p^2-1)\big).$$

Encore une fois, il faut que chaque indice apparaît au moins deux fois pour que l'espérance soit non nulle. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(w^2q^2) = n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}\big(u_t^2(u_t^2-1)^2\big) + n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1,s\neq t}^{n}\mathrm{E}(u_t^2)\mathrm{E}((u_s^2-1)^2) \\
+ 2n^{-2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1,s\neq t}^{n}\mathrm{E}(u_t(u_t^2-1))\mathrm{E}(u_s(u_s^2-1))
\end{aligned}$$

Le premier terme est de l'ordre de n^{-1}, parce que n^{-1} fois la somme est de l'ordre de 1. Les deux autres termes résultent des trois manières de regrouper les indices en deux groupes de deux. Deux de ces trois manières donnent le même résultat, d'où le facteur de 2 dans le dernier terme. En explicitant, on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(w^2q^2) &= n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t^2)\ \ n^{-1}\sum_{s=1,s\neq t}^{n}\mathrm{E}((u_s^2-1)^2) \\
&\quad + 2n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t(u_t^2-1))\ \ n^{-1}\sum_{s=1,s\neq t}^{n}\mathrm{E}(u_s(u_s^2-1)) + O_p(n^{-1}) \\
&= n^{-1}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}(u_s^4-2u_s^2+1) + 2\Big(n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathrm{E}(u_t^3-u_t)\Big)^2 + O_p(n^{-1}),
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que $\mathrm{E}(u_t^2) = 1$, et le fait qu'un seul terme de la somme pour s ne contribue qu'à l'ordre de n^{-1}. Enfin, on se sert de (14) pour aboutir au résultat suivant.

$$\mathrm{E}(w^2 q^2) = 2 + \kappa_4 + 2\kappa_3^2 + O_p(n^{-1}). \tag{19}$$

Nous reprenons maintenant l'équation (17). Avec les résultats que nous avions pour le calcul de $\mathrm{E}(T-\delta)$ et les nouveaux résultats (18) et (19), cette équation devient

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T-\delta)^2 &= 1 - n^{-1}(2+\kappa_4) + 2n^{-1} + n^{-1}(2+\kappa_4+2\kappa_3^2) \\ &\quad - n^{-1/2}\delta\kappa_3 + \frac{1}{4}n^{-1}\delta^2(2+\kappa_4) + o(n^{-1}) \\ &= 1 + 2n^{-1}(1+\kappa_3^2) - n^{-1/2}\delta\kappa_3 + \frac{1}{4}n^{-1}\delta^2(2+\kappa_4) + o(n^{-1}).\end{aligned}$$

D'autres calculs du même type, de plus en plus compliqués, montrent que

$$\mathrm{E}(T-\delta)^3 = -\frac{7}{2}n^{-1/2}\kappa_3 + 3n^{-1}\delta\big(\frac{7}{4}(1+\kappa_3^2) + \frac{3}{8}\kappa_4\big),$$

et que

$$\mathrm{E}(T-\delta)^4 = 3 + n^{-1}(18 + 28\kappa_3^2 - 2\kappa_4) + \delta\big(-6n^{-1/2}\kappa_3 + \frac{3}{2}n^{-1}\delta(2+2\kappa_3^2+\kappa_4)\big).$$

Moments et Cumulants

La **fonction caractéristique** de la distribution d'une variable aléatoire réelle X est, par définition,

$$\zeta(t) = \mathrm{E}\big(e^{itX}\big). \tag{20}$$

Ici, i signifie la racine carrée de -1, c'est-à-dire, l'unité imaginaire des complexes. Étant donné que $|e^{itX}| = 1$ pour tout t réel, on voit que l'espérance existe toujours. Le développement de Taylor de la fonction exponentielle autour de l'origine s'écrit comme

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Avec ce développement, (20) devient

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\mathrm{E}(X^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j \mu_j}{j!}, \tag{21}$$

où μ_j est le moment non centré de X de l'ordre j. Pour que (21) soit exact, il faut, bien entendu, que tous les μ_j existent.

La **fonction génératrice des cumulants**, notée $\psi(t)$, est le logarithme de la fonction caractéristique: $\psi(t) = \log\zeta(t)$. Si on fait un développement de Taylor de $\psi(t)$, on trouve un développement de la forme

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j \kappa_j}{j!}. \tag{22}$$

On remarque que le premier terme de la somme correspond à $j = 1$. C'est parce que $\zeta(0) = \mathrm{E}(e^0) = 1$ toujours, de sorte que $\psi(0) = \log\zeta(0) = 0$. Il n'y a donc pas de terme constant dans le développement de $\psi(t)$. Les κ_j sont par définition les **cumulants** de la distribution de X. Les cumulants sont reliés aux moments. Pour les 4 premiers cumulants, on a

$$\kappa_1 = \mu_1, \quad \kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \mu_2^0, \quad \kappa_3 = \mu_3^0, \quad \kappa_4 = \mu_4^0 - 3(\mu_2^0)^2,$$

où μ_j^0 est le moment centré d'ordre j: $\mu_j^0 \equiv \mathrm{E}\big((X - \mu_1)^j\big)$. Les deux premiers cumulants sont done l'espérance et la variance respectivement. On peut démontrer que tous les cumulants de la loi normale sont nuls après le deuxième.

Soit $\{X_s\}$ un suite IID de variables aléatoires, et soient $\zeta(t)$ et $\psi(t)$ les fonctions caractéristique et génératrice des cumulants de la distribution commune des X_s. On va supposer, sans perte de généralité, que l'espérance de cette distribution est nulle, et que sa variance est 1. Considérez la somme

$$Y^n \equiv n^{-1/2} \sum_{s=1}^{n} X_s,$$

dont la loi asymptotique quand $n \to \infty$ est la loi N(0,1), par le théorème de limite centrale. La fonction caractéristique de Y^n est

$$\zeta_n(t) = \mathrm{E}\big(\exp(itn^{-1/2} \sum_{s=1}^{n} X_s)\big) = \mathrm{E}\big(\prod_{s=1}^{n} \exp(itn^{-1/2} X_s)\big), \tag{23}$$

parce que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles des termes de la somme. Les variables X_s sont indépendantes. Ce fait permet de factoriser l'espérance du dernier membre de (23), comme suit:

$$\zeta_n(t) = \prod_{s=1}^{n} \mathrm{E}\big(\exp(itn^{-1/2} X_s)\big) = \prod_{s=1}^{n} \zeta(n^{-1/2}t) = \big(\zeta(n^{-1/2}t)\big)^n.$$

En termes de la fonction $\psi_n(t)$, fonction génératrice des cumulants de Y^n, on a un relation encore plus simple:

$$\psi_n(t) = n\psi(n^{-1/2}t). \tag{24}$$

On se sert maintenant du développement (22), afin de récrire (24) de la manière suivante.

$$\psi_n(t) = n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(itn^{-1/2})^j \kappa_j}{j!}. \tag{25}$$

Or, $\kappa_1 = 0$, parce que l'espérance des X_s est nulle, et $\kappa_2 = 1$, parce que la variance des X_s est égale à 1. (25) devient

$$\psi_n(t) = -\frac{t^2}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(it)^n n^{1-j/2} \kappa_j}{j!}. \tag{26}$$

Quand $n \to \infty$, la somme tend vers 0, parce toutes les puissances de n sont des puissances négatives. On voit que

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = -\frac{t^2}{2},$$

et on vérifie sans peine que le membre de droite de cette équation est la fonction génératrice des cumulants de la loi N(0,1). C'est la conclusion du théorème de limite centrale. Si nous notons κ_j^n le cumulant d'ordre j de Y^n, nous voyons aussi que $\kappa_j^n = n^{1-j/2}\kappa_j = O(n^{1-j/2})$ pour tout $j \geq 3$.

Même si la variable aléatoire que l'on souhaite étudier n'est pas une somme de variables IID, il arrive souvent, et sous des conditions de régularité peu contraignantes, que $\kappa_j^n = O(n^{1-j/2})$ pour $j \geq 3$. Si on arrive à centrer et à standardiser la variable que nous notons désormais τ, on a aussi que $\kappa_1^n = 0$, $\kappa_2^n = 1$. Sinon, on peut presque toujours s'arranger à ce que $\kappa_1^n = O(n^{-1/2})$ et $\kappa_2^n = 1 + O(n^{-1})$. C'est ce que nous allons supposer dans la suite.

Relation entre la Fonction Caractéristique et la Densité

Soit $f(x)$ la densité de la variable X. La définition (20) peut s'écrire

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx. \tag{27}$$

La relation (27) exprime le fait que la fonction caractéristique est la **transformée de Fourier** de la densité. Sous la condition de régularité que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(t)|\, dt < \infty,$$

on peut démontrer que la relation (27) peut être inversée afin de donner

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \zeta(t)\, dt. \tag{28}$$

Prenons maintenant la généralisation de (26) pour les sommes de variables qui ne sont pas forcément des variables IID. En toute généralité, on a

$$\psi_n(t) = it\kappa_1^n - \frac{t^2}{2}\kappa_2^n + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(it)^j \kappa_j^n}{j!}. \tag{29}$$

Notre hypothèse est que $\kappa_1^n = O(n^{-1/2})$, $\kappa_2 = 1 + O(n^{-1})$, et $\kappa_j = O(n^{1-j/2})$, $j \geq 3$. Sous cette hypothèse, nous pouvons récrire (29) comme

$$\psi_n(t) = itn^{-1/2}k_1 - \frac{t^2}{2}(1 + n^{-1}k_2) + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(it)^j n^{1-j/2} k_j}{j!}, \tag{30}$$

où $k_1 = n^{1/2}\kappa_1^n = O(1)$, $k_2 = n(\kappa_2^n - 1) = O(1)$, et $k_j = n^{j/2-1}\kappa_j^n = O(1)$, $j \geq 3$.

La fonction caractéristique de la variable τ est l'exponentielle de (30), que nous calculons comme suit.

$$\begin{aligned}
\zeta_n(t) &= \exp\bigl(\psi_n(t)\bigr) \\
&= e^{-t^2/2} \exp\Bigl(itn^{-1/2}k_1 - \tfrac{1}{2}n^{-1}t^2k_2 + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(it)^j n^{1-j/2} k_j}{j!}\Bigr) \\
&= e^{-t^2/2}\Bigl(1 + itn^{-1/2}k_1 - \tfrac{1}{2}n^{-1}t^2k_2 + \frac{n^{-1/2}(it)^3k_3}{6} + \frac{n^{-1}t^4k_4}{24} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}n^{-1}t^2k_1^2 - \frac{n^{-1}t^6k_3^2}{72} + O(n^{-3/2})\Bigr).
\end{aligned} \tag{31}$$

On a déjà remarqué que a fonction génératrice des cumulants de la loi N(0,1) est la fonction $-t^2/2$. La fonction caractéristique est donc $e^{-t^2/2}$, et, par la formule (28), on voit que la densité de la loi N(0,1) s'écrit

$$\phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{32}$$

Considérez maintenant l'intégrale suivante:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ite^{-itx} e^{-t^2/2}\, dt = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2}\, dt = -\phi'(x).$$

On sait que $-\phi'(x) = \phi(x)He_1(x)$. Ce raisonnement s'étend simplement. Pour tout entier positif j, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (it)^j e^{-itx} e^{-t^2/2}\, dt = (-1)^j \phi^{(j)}(x) = \phi(x)He_j(x). \tag{33}$$

La formule (33) permet d'inverser la fonction caractéristique (31). Par (28), la densité $f(x)$ de τ s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,\zeta_n(t)\,dt.$$

En annulant tout ce qui est d'un ordre inférieur à n^{-1}, nous trouvons que la densité de τ est approximée par l'expression

$$\begin{aligned} f(x) \approx \phi(x)\Big(1 &+ n^{-1/2}k_1 He_1(x) + \tfrac{1}{2}n^{-1}(k_2+k_1^2)He_2(x) \\ &+ \tfrac{1}{6}n^{-1/2}k_3 He_3(x) + \tfrac{1}{24}n^{-1}k_4 He_4(x) + \tfrac{1}{72}n^{-1}k_3^2 He_6(x)\Big). \end{aligned} \tag{34}$$

Cette expression constitue un développement d'Edgeworth. Dans la mesure où on peut calculer les k_i, $i = 1, 2, 3, 4$, on a ce qu'il faut.

Reprenons un développement d'Edgeworth sous sa forme générale:

$$f(x) = \phi(x)\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} e_j He_j(x)\Big). \tag{35}$$

On se rappelle la propriété d'orthonormalité des polynômes d'Hermite, qui s'écrit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) He_j(x) He_k(x)\,dx = j!\,\delta_{jk}, \quad j,k = 0,1,\ldots \tag{36}$$

En multipliant (35) par $He_k(x)$, en en intégrant, on se sert de (36) afin de trouver que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)He_k(x)\,dx &= \mathrm{E}\big(He_k(\tau)\big) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)He_k(x)\,dx + \sum_{j=1}^{\infty} e_j \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)He_j(x)He_k(x)\,dx \\ &= k!\,e_k. \end{aligned}$$

La première intégrale de la seconde ligne s'annule parce que $He_0(x) = 1$. La conclusion est que $e_k = (1/k!)\mathrm{E}\big(He_k(\tau)\big)$.

En comparant la forme générale (35) et la forme spécifique (34), on voit que

$$\begin{aligned} &e_1 = n^{-1/2}k_1, \qquad e_2 = \tfrac{1}{2}n^{-1}(k_2+k_1^2), \qquad e_3 = \tfrac{1}{6}n^{-1/2}k_3, \\ &e_4 = \tfrac{1}{24}n^{-1}k_4, \qquad e_6 = \tfrac{1}{72}n^{-1}k_3^2. \end{aligned}$$

On vérifie que, par exemple,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big(He_1(\tau)\big) &= \mathrm{E}(\tau) = \kappa_1^n = n^{-1/2}k_1, \\ \mathrm{E}\big(He_2(\tau)\big) &= \mathrm{E}((\tau)^2 - 1) = \mu_2^n - 1 \\ &= \kappa_2^n + (\kappa_1^n)^2 - 1 = n^{-1}(k_2+k_1^2) = 2!\,e_2, \quad \textit{etc.} \end{aligned}$$

En particulier, on note que $e_6 = \frac{1}{2}e_3^2$. Les ordres de grandeur sont tels que

$$e_1 = O(n^{-1/2}), e_2 = O(n^{-1}), e_3 = O(n^{-1/2}), e_4 = O(n^{-1}), e_6 = O(n^{-1}),$$

et tous les autres e_j sont d'un ordre inférieur. Nous notons

$$e_1 = n^{-1/2}b_1, e_2 = n^{-1}b_2, e_3 = n^{-1/2}b_3, e_4 = n^{-1}b_4, e_6 = n^{-1}b_6,$$

où les b_i sont $O(1)$.

Le Développement de Cornish-Fisher

Le développement d'Edgeworth est une approximation de la fonction de répartition ou de la densité. Son inverse, le développement de Cornish-Fisher, donne une approximation des quantiles. Soit q_α le quantile-α de la distribution de τ. Par définition, $F(q_\alpha) = \alpha$, où on note F la fonction de répartition. En intégrant le développement (35) de la densité f, on obtient celui de F.

$$F(x) \approx \Phi(x) - \phi(x) \sum_{j=1}^{\infty} e_j He_{j-1}(x).$$

Le quantile q_α vérifie donc l'équation

$$\alpha = \Phi(q_\alpha) - \phi(q_\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} e_j He_{j-1}(q_\alpha),$$

que nous utilisons sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\alpha = \Phi(q_\alpha) - \phi(q_\alpha)\big(&n^{-1/2}b_1 He_0(q_\alpha) + n^{-1}b_2 He_1(q_\alpha) + n^{-1/2}b_3 He_2(q_\alpha) \\ &+ n^{-1}b_4 He_3(q_\alpha) + n^{-1}b_6 He_5(q_\alpha)\big) + O(n^{-3/2}).\end{aligned} \tag{37}$$

Nous cherchons un développement, exact à l'ordre n^{-1}, de q_α. Ce développement a la forme suivante:

$$q_\alpha = z_\alpha + n^{-1/2}q_\alpha^1 + n^{-1}q_\alpha^2 + O(n^{-3/2}), \tag{38}$$

où les coefficients q_α^1 et q_α^2 ne dépendent pas de n. On utilise la notation z_α pour signifier le quantile-α de la loi N(0,1). On a donc que $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

Par développement de Taylor, on obtient le résultat

$$\begin{aligned}\Phi(q_\alpha) = \Phi(z_\alpha) &+ \phi(z_\alpha)He_0(z_\alpha)(n^{-1/2}q_\alpha^1 + n^{-1}q_\alpha^2) \\ &- \tfrac{1}{2}\phi(z_\alpha)He_1(z_\alpha)n^{-1}(q_\alpha^1)^2 + O(n^{-3/2}).\end{aligned}$$

De même,

$$\phi(q_\alpha)He_j(q_\alpha) = \phi(z_\alpha)He_j(z_\alpha) - \phi(z_\alpha)He_{j+1}(z_\alpha)n^{-1/2}q_\alpha^1 + O(n^{-1}).$$

À l'ordre n^{-1}, donc, (37) s'écrit

$$\begin{aligned}\alpha = \alpha + \phi(z_\alpha)\Big(&He_0(z_\alpha)\big(n^{-1/2}q_\alpha^1 + n^{-1}q_\alpha^2 - n^{-1/2}b_1\big)\\ &+ He_1(z_\alpha)\big(-\tfrac{1}{2}n^{-1}(q_\alpha^1)^2 + n^{-1}b_1q_\alpha^1 - n^{-1}b_2\big) + He_2(z_\alpha)(-n^{-1/2}b_3)\\ &+ He_3(z_\alpha)\big(n^{-1}b_3q_\alpha^1 - n^{-1}b_4\big) + He_5(z_\alpha)(n^{-1}b_6)\Big),\end{aligned} \tag{39}$$

où on se rappelle que $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

Les coefficients de $n^{-1/2}$ et de n^{-1} doivent s'annuler séparément dans l'équation (39). Ceci nous donne deux équations. D'abord, à l'ordre $n^{-1/2}$, on a que

$$He_0(z_\alpha)(q_\alpha^1 - b_1) - He_2(z_\alpha)b_3 = 0.$$

Or, $He_0(z_\alpha) = 1$ et $He_2(z_\alpha) = z_\alpha^2 - 1$. On a donc que

$$q_\alpha^1 = b_1 + (z_\alpha^2 - 1)b_3. \tag{40}$$

Ensuite, à l'ordre n^{-1}, il faut que

$$\begin{aligned}He_0(z_\alpha)q_\alpha^2 + He_1(z_\alpha)&\big(-\tfrac{1}{2}(q_\alpha^1)^2 + b_1q_\alpha^1 - b_2\big)\\ &+ He_3(z_\alpha)(b_3q_\alpha^1 - b_4) + He_5(z_\alpha)b_6 = 0.\end{aligned}$$

En résolvant, on trouve que

$$q_\alpha^2 = He_1(z_\alpha)\big(-\tfrac{1}{2}(q_\alpha^1)^2 + b_1q_\alpha^1 - b_2\big) + He_3(z_\alpha)(b_3q_\alpha^1 - b_4) + He_5(z_\alpha)b_6,$$

que l'on peut expliciter en utilisant (40).

Le Seuil Critique Bootstrap

Sous l'hypothèse nulle, $\delta = 0$, et les coefficients du développement d'Edgeworth sont comme suit.

$$\begin{aligned}&b_1 = -\tfrac{1}{2}\kappa_3, \qquad b_2 = 1 + \kappa_3^2, \qquad b_3 = -\tfrac{1}{3}\kappa_3,\\ &b_4 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3}\kappa_3^2 - \tfrac{1}{12}\kappa_4, \qquad b_6 = \tfrac{1}{18}\kappa_3^3.\end{aligned} \tag{41}$$

Le PGD bootstrap appartient toujours à l'hypothèse nulle, et les coefficients de son développement sont donc ceux de (41) avec κ_3 et κ_4 remplacés par les cumulants de la loi bootstrap, $\hat{\kappa}_3$ et $\hat{\kappa}_4$.

On a vu que la distribution de la statistique T ne dépend ni de μ_0 ni de σ_0. Ceci étant, on pose $\mu_0 = 0$ et $\sigma_0 = 1$ dans la formulation du PGD bootstrap, et on a simplement

$$y_t^* = u_t^*,$$

où les u_t^* sont des tirages IID de la fonction de répartition empirique des résidus restandardisés

$$\hat{u}_t = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} \frac{y_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}.$$

Nous savons de (4) que $\sum (y_t - \hat{\mu}) = 0$; il en découle que la loi des u_t^* est centrée. Pour la variance, (5) nous montre que

$$\sum_{t=1}^{n} \left(\frac{y_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^2 = n - 1,$$

d'où on voit que $n^{-1} \sum \hat{u}_t^2 = 1$, c'est-à-dire que la variance de la loi des u_t^* est égale à 1.

Les définitions (14) permettent de calculer les $\hat{\kappa}_i$, $i = 3, 4$. On a

$$\hat{\kappa}_3 = \mathrm{E}\big((u_t^*)^3\big) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{y_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^3$$

En utilisant (8), on obtient que, à l'ordre n^{-1},

$$\hat{\kappa}_3 = \Big(1 + \frac{3}{2n}\Big)\Big(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\Big)^{-3/2} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (u_t - n^{-1/2} w)^3.$$

Un calcul démontre que $\hat{\kappa}_3$, à l'ordre n^{-1}, s'exprime en fonction des variables aléatoires w et q déjà introduites, et d'une variable nouvelle, définie par l'équation

$$s = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} (u_j^3 - \kappa_3).$$

Le théorème limite centrale montre que la variable s est asymptotiquement normale. Un calcul un peu plus long donne l'expression de $\hat{\kappa}_4$ en fonction des variables déjà définies, et de la variable

$$k = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \big(u_t^4 - (3 + \kappa_4)\big).$$

Cette nouvelle variable est aussi asymptotiquement normale. On remarque que $\hat{\kappa}_3$ et $\hat{\kappa}_4$ ne dépendent pas du paramètre de non centralité δ.

Le quantile-α de la loi bootstrap, qui est par définition le seuil critique pour un test à niveau α qui rejette à gauche, est donné par (38) avec les coefficients q_α^1 et q_α^2 remplacés par $\hat{q}_\alpha^1$ et $\hat{q}_\alpha^2$. Ces coefficients ont exactement la même forme algébrique que q_α^1 et q_α^2, avec $\hat{\kappa}_3$ et $\hat{\kappa}_4$ à la place de κ_3 et κ_4.

L'Écart Bootstrap

Le test bootstrap donne lieu à un rejet si $T < Q(\alpha, \mu^*)$. On sait que

$$Q(\alpha, \mu^*) = z_a + n^{-1/2}\hat{q}^1_\alpha + n^{-1}\hat{q}^2_\alpha.$$

La condition de rejet est donc équivalente à la condition

$$T - \delta - n^{-1/2}(\hat{q}^1_\alpha - q^1_\alpha) - n^{-1}(\hat{q}^2_\alpha - q^2_\alpha) < z_\alpha - \delta + n^{-1/2}q^1_\alpha + n^{-1}q^2_\alpha,$$

où tous les éléments aléatoires sont dans le membre de gauche de l'inégalité. La probabilité de rejet (approximative) est donnée par la valeur de la fonction de distribution (approximative) de la variable

$$T - \delta - n^{-1/2}(\hat{q}^1_\alpha - q^1_\alpha) - n^{-1}(\hat{q}^2_\alpha - q^2_\alpha) \tag{42}$$

évaluée en $z_\alpha - \delta + n^{-1/2}q^1_\alpha + n^{-1}q^2_\alpha$.

Il faut donc calculer les moments de la variable (42) afin de trouver le développement d'Edgeworth de cette variable. Ensuite on l'évalue en l'argument qu'on vient de donner pour avoir la probabilité de rejet. Pour $\delta = 0$, l'écart entre α et cette probabilité est la distorsion du niveau. Pour $\delta \neq 0$, l'écart bootstrap est la différence entre la probabilité de rejet et la probabilité que $T < Q(\alpha, \mu)$ pour le vrai μ. Cette dernière probabilité est donnée par la fonction de distribution de $T - \delta$ évaluée en $Q(\alpha, \mu) - \delta$.